



GRUNDPRAKTIKUM

---

# O10: Linsensysteme

---

*Autor:*



*Partner:*



Versuchsdatum: 

Versuchsplatz: 

Abgabedatum: 

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Physikalische Grundlagen und Aufgabenstellung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Bestimmung der Linsenbrennweiten</b>	<b>2</b>
2.1	Untersuchung von Linse 3/2 mit der Bessel-Methode . . . . .	2
2.2	Untersuchung von Linse 3/3 mit dem Sphärometer . . . . .	3
2.3	Zeichnerische Konstruktion der Hauptebenen . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Experimentelle Bestimmung der Hauptebenen nach Abbé</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Fehleranalyse und kritische Ergebniseinschätzung</b>	<b>5</b>
<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>7</b>

# 1 Physikalische Grundlagen und Aufgabenstellung

Der Versuch O10: Linsensysteme erlaubt es, ein System aus zwei optischen Linsen mit Hilfe von Hauptebenen einfach zu beschreiben. Dabei sollen die Hauptebenen einmal rechnerisch nach der Methode von Abbé bestimmt, und einmal aus den Daten der verwendeten Einzellinsen graphisch konstruiert werden. Eine genaue Ausführung der physikalischen Grundlagen und der Aufgabenstellung befindet sich in [2, S. 77-81] und soll hier deswegen nicht wiederholt werden.

## 2 Bestimmung der Linsenbrennweiten

Als Vorbereitung für die graphische Konstruktion der Hauptebenen sollten die Brennweiten der verwendeten Linsen mit Hilfe zweier verschiedener Methoden bestimmt werden.

### 2.1 Untersuchung von Linse 3/2 mit der Bessel-Methode

Die Messung nach der Bessel-Methode wurde nach der Anleitung im Skript durchgeführt. Dabei wurden die Länge  $l$  sowie die Linsenpositionen  $s_1$  und  $s_2$  aufgenommen. Mit  $e = s_2 - s_1$  folgt aus

$$f_2 = \frac{l^2 - e^2}{4l} \quad (1)$$

die gesuchte Brennweite  $f_2$  der untersuchten Linse. Auf diese Weise wurden aus 10 verschiedenen Anordnungen von Linse und Schirm 10 Werte für die Brennweite gewonnen (siehe Tabelle 1 im Anhang).

Aus den Einzelwerten für die Brennweite wurde ein Mittelwert gebildet, der einen statistischen Fehler  $\overline{s_f}$  und einen systematischen Restfehler  $e_f$  hat. Zur Bestimmung von  $e_f$  müssen die systematischen Fehler von  $l$  und  $e$  bekannt sein: Bestandteil von  $e_l$  ist zum einen der systematische Fehler des am optischen Tisch angebrachten Maßbandes, der mit  $e_{m(l)} = 50\mu m + 5 \cdot l \cdot 10^{-5}$  abgeschätzt wurde. Zum anderen muss berücksichtigt werden, dass die exakte Lage des Schirmes unbekannt ist, da alle Messungen nur am Sockel der Halterung durchgeführt wurden. Diese Unsicherheit in der Positionsbestimmung vom Schirm relativ zum Abnahmepunkt wurde mit  $\Delta S = 2\text{ mm}$  abgeschätzt. Gleiches gilt auch für die Lage des Gegenstandes  $G$ , der eigentlich als Nullpunkt aller Längenmessungen gelten muss - hier war die Unsicherheit über die exakte Lage noch größer und wurde deswegen mit  $\Delta G = 5\text{ mm}$  angenommen. Da die Vorzeichen dieser Fehler unbekannt sind werden sie pythagoreisch zu

$$e_l = \sqrt{e_{m(l)}^2 + \Delta G^2 + \Delta S^2} \quad (2)$$

addiert. In den systematischen Fehler der Positionsdivergenz  $e$  geht nur der Betrag des systematischen Fehlers des Maßbandes mit  $e_{m(e)} = 50\mu m + 5 \cdot e \cdot 10^{-5}$  ein. Der systematische Fehler  $e_f$  errechnet sich schließlich nach dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz zu

$$e_f = \sqrt{\left(\frac{l^2 + e^2}{4l^2} \cdot e_l\right)^2 + \left(\frac{-e}{2l} \cdot e_{m(e)}\right)^2} \quad (3)$$

Der statistische Fehler  $s_f$  für den Mittelwert entspricht dem Vertrauensbereich, also der Standardabweichung  $\sigma$  geteilt durch die Quadratwurzel der Anzahl der Messwerte. Beide Unsicherheiten können dann pythagoreisch zum Gesamtfehler des Mittelwertes  $u_f$  addiert werden,

$$u_f = \sqrt{e_f^2 + s_f^2} \quad (4)$$

so dass sich für die Brennweite  $f_2$  der Linse 3/2 ergibt:

$$f_2 = (11,4 \pm 0,2) \text{ cm}$$

## 2.2 Untersuchung von Linse 3/3 mit dem Sphärometer

Die bikonvexe Linse 3/3 wurde mit Hilfe des Sphärometers für Konvexlinsen vermessen. Hiermit können die Krümmungsradien  $R_1$  und  $R_2$  der Linse nach folgender Formel bestimmt werden:

$$R_i = \frac{r^2}{2h_i} + \frac{h_i}{2} \quad \text{mit } i = 1, 2 \quad (5)$$

wobei  $h_i$  die jeweilig mit dem Sphärometer gemessene Pfeilhöhe bezeichnet und  $r = (15,0 \pm 0,5) \text{ mm}$  ein dem Sphärometer charakteristischer Radius ist. Sind die Radien bekannt kann die Brennweite der Linse wie folgt berechnet werden

$$f_3 = \left[ (n-1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right]^{-1} \quad (6)$$

wobei  $n = 1,53$  den am Messplatz vorgegebenen Brechungsindex der Linse bezeichnet.

Um die Höhe  $h_i$  zu bestimmen musste die Skala des Sphärometers abgelesen werden, wobei ein Skalenteil eine Höhe von  $\Delta h = 10 \text{ } \mu\text{m}$  bedeutet. Es wurden auf beiden Seiten der Linse  $55 \pm 0,5$  Skalenteile abgelesen, d.h. die Linse 3/3 ist symmetrisch bikonvex und es gilt  $R_1 = R_2 = R$  und  $h_1 = h_2 = h$ . Der systematische Fehler der Sphärometers wurde mit dem einer Bügelmessschraube angenommen zu  $e_h = 200 \text{ } \mu\text{m} + h \cdot 10^{-3}$ . Damit ergibt sich die Unsicherheit der Höhenmessung  $u_h$  und die Unsicherheit der Radiusmessung  $u_R$  aus der Fehlerfortpflanzung zu

$$u_h = \sqrt{(0,5 \cdot \Delta h)^2 + e_h^2} \quad (7)$$

$$u_R = \sqrt{\left( \left[ \frac{1}{2} - \frac{r^2}{2h^2} \right] \cdot u_h \right)^2 + \left( \frac{r}{h} \cdot u_r \right)^2} \quad (8)$$

Es folgt mit der Gleichung (5)

$$h = (550 \pm 7) \text{ } \mu\text{m}$$

$$R = (20 \pm 1) \text{ cm}$$

und durch Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes auf Gleichung (6)

$$u_f = \sqrt{2 \left( \frac{(n-1)}{R^2} \cdot u_R \right)^2} \cdot f^2 \quad (9)$$

und schließlich für die Brennweite der Linse 3/3:

$$f_3 = (19,3 \pm 0,9) \text{ cm}$$

## 2.3 Zeichnerische Konstruktion der Hauptebenen

Die so gefundenen Werte für  $f_2$  und  $f_3$  können nun zur zeichnerischen Konstruktion der Hauptebenen eines Linsensystems aus Linse 2/3 und 3/3 verwendet werden, wenn als zusätzliche Information auch der Abstand zwischen den zwei Linsen  $d$  bekannt ist. In den nachfolgenden Teilen des Experiments wurde mit einem Abstand von  $d = (59 \pm 2) \text{ mm}$  gearbeitet, so dass dieses  $d$  auch für die zeichnerische Konstruktion der Hauptebenen verwendet werden sollte, um eine Vergleichbarkeit der Ergebnisse zu ermöglichen.

Die zeichnerische Konstruktion befindet sich im Anhang. Zu den dort angegebenen Werten von  $a$ ,  $f$  und  $f'$  sollte noch eine Unsicherheit von etwa einem Kästchen auf dem Milimeterpapier, also im gewählten Maßstab von ungefähr  $2 \text{ mm}$  addiert werden. Das zeichnerische Endergebnis für die Systembrennweite ergibt sich dann durch die Bildung eines gewichteten Mittels zu  $f_S = (87 \pm 2) \text{ mm}$ , der Hauptebenenabstand kann mit  $a = (-12 \pm 2) \text{ mm}$  angegeben werden.

## 3 Experimentelle Bestimmung der Hauptebenen nach Abbé

Im zweiten Teil des Versuches sollten die Hauptebenen eines Linsensystems aus zwei Linsen experimentell nach der Abbé-Methode bestimmt werden. Dazu wurden die Linsen 3/2 und 3/3 im Abstand von  $d = (59 \pm 2) \text{ mm}$  angeordnet. Dann wurde willkürlich eine Kante, nämlich die Sockelkante unter Linse 3/2, ausgewählt. Gemäß der Anleitung im Skript wurden zwei Messreihen zu 10 Messwerten mit jeweils gedrehtem Linsensystem durchgeführt und neben der Lage  $x$  der gewählten Kante auch die Gegenstandsgröße  $G$  gemessen (siehe Tabelle 2 im Anhang).

Als Gegenstand kam ein von hinten beleuchtetes Zentimetermaß zum Einsatz, das auf den Schirm abgebildet wurde. Die Bildgröße  $B = (20,0 \pm 0,5) \text{ mm}$  war dabei durch zwei horizontale Striche auf dem Schirm fest vorgegeben, so dass die Gegenstandsgröße aus den innerhalb der Striche enthaltenen Skalenteilen des Zentimetermaßes abgelesen wurde. Aus  $G$  und  $B$  konnte dann

$$A = 1 + \frac{1}{\gamma} = 1 + \frac{G}{B} \quad (10)$$

berechnet werden, wobei  $\gamma$  den Vergrößerungsfaktor des Linsensystems bezeichnet. Dann können zwei lineare Regressionen mit den Funktionen  $x = f \cdot A + c$  bzw.  $x' = f \cdot A + c'$  durchgeführt werden, um die Systembrennweite  $f_S$  sowie den Hauptebenenabstand  $a = c + c'$ , und damit die Lage der Hauptebenen relativ zum Linsensystem vollständig zu bestimmen.

In die Unsicherheit von  $x$  fließen neben dem Ablesefehler des Maßstabes, abgeschätzt durch  $s_m = 1 \text{ mm}$ , und seinem systematischen Fehler  $e_{m(x)} = 50 \mu\text{m} + 5 \cdot x \cdot 10^{-5}$  auch noch das bereits oben beschriebene  $\Delta G$  ein, da  $x$  den Abstand zum Gegenstand angeben soll. Alle drei Terme werden pythagoreisch addiert. Da es sich bei  $G$  um ein Zentimetermaß handelt, und die Skala des Maßes auch tatsächlich zur Messung von  $G$  genutzt wurde (siehe oben), muss für  $u_G$  die Unsicherheit eines Büromaßstabes

angenommen werden, also eine Ableseungenauigkeit von einem halben Skalenteil, d.h.  $s_G = 0,5 \text{ mm}$  und ein systematischer Fehler von  $e_G = 200 \mu\text{m} + G \cdot 10^{-3}$ , die beide pythagoreisch addiert werden. Durch Anwendung der Fehlerfortpflanzung ergeben sich so

$$u_A = \sqrt{\left(\frac{1}{G} \cdot u_B\right)^2 + \left(\frac{B}{G^2} \cdot u_G\right)^2} \cdot A^{-2} \quad (11)$$

Nun können die Werte von  $x$  und  $A$  für beide Messreihen gegeneinander aufgetragen und einer linearen Regression unterzogen werden (siehe Abbildungen 1 und 2 im Anhang). Dabei wurde auf das Softwarepaket *OriginPro 8.6* zurück gegriffen. Die Regressionen wurden mit der *Instrumental-Methode* nach  $u_x$  gewichtet. Als Ergebnisse folgen:

Messreihe 1	Messreihe 2
$c = (12 \pm 2) \text{ mm}$	$c = (-35 \pm 3) \text{ mm}$
$f = (9 \pm 1) \text{ mm}$	$f = (9 \pm 2) \text{ mm}$
$R^2 = 0,998$	$R^2 = 0,995$

Wie zu erwarten war deuten die gute  $R^2$ -Werte an, dass die passende Regressionsfunktion genutzt wurde.

Um ein endgültiges Ergebnis für die Systembrennweite  $f_S$  zu erhalten wird jetzt über beide Werte von  $f$  ein gewichtetes Mittel gebildet. Der Abstand der Hauptebenen ergibt sich aus  $a = c + c'$ , wobei die Unsicherheiten wieder pythagoreisch addiert werden, und somit folgt:

$$\begin{aligned} a &= (-24 \pm 4) \text{ mm} \\ f_S &= (91 \pm 2) \text{ mm} \end{aligned}$$

Damit sind die Lagen der Hauptebenen bestimmt: wird das Linsensystem aus den Linsen 3/2 und 3/3, die in einem Abstand von  $d = (59 \pm 2) \text{ mm}$  angeordnet sind, von der Sockelkante unter Linse 3/2 aus betrachtet, dann befinden sich, da  $c'$  negativ ist, beide Hauptebenen in der gleichen Richtung:  $H$  im Abstand  $(12 \pm 2) \text{ mm}$  und  $H'$  im Abstand  $(35 \pm 3) \text{ mm}$  von der Kante. Beide Hauptebenen haben damit einen Abstand von  $(24 \pm 4) \text{ mm}$  untereinander. Die Systembrennweite beträgt  $f_S = (91 \pm 2) \text{ mm}$ .

## 4 Fehleranalyse und kritische Ergebniseinschätzung

Im direkten Vergleich wird deutlich, dass die Methode nach Bessel zu genaueren Ergebnissen bei der Bestimmung der Einzelbrennweiten führt. Natürlich wird dieser Vorteil mit einem erhöhten experimentellen und rechnerischen Aufwand erkauft. Weiterhin kann der getrennten Behandlung von systematischen und statistischen Fehlern entnommen werden, dass die Methode ohne eine Veränderung des Versuchsaufbaus nicht wesentlich genauer gemacht werden kann - der statistische Fehler ist schon im hier durchgeführten Experiment vernachlässigbar klein. Einzig die Verwendung noch genauerer Messmittel sowie eine genauere Bestimmung der tatsächlichen Lagen von  $G$  und dem Schirm, also eine Minimierung von  $\Delta G$  kann also die

Genauigkeit der Methode noch steigern. Im Fall der Sphärometer-Methode ist die Unsicherheit des Radius  $r$  wesentlich für die größere Unsicherheit des Ergebnisses verantwortlich, außerdem muss die Brechzahl der untersuchten Linse bekannt sein, um Aussagen treffen zu können.

Die Abbé-Methode zur Bestimmung der Hauptebenen lieferte über die Regression ein relativ präzises Ergebnis. Zu beachten ist hier allerdings, dass bei der Regression  $A = 1 + 1/\gamma$  als fehlerfrei angenommen wurde, was allerdings nicht zutreffend ist: ein Blick in die entsprechenden Tabellen im Anhang macht deutlich, dass  $u_A$  bei einigen Messwerten sogar sehr groß wird. Dies ist vor allem bei großen Vergrößerungen  $\gamma$  der Fall - der relative Fehler erreicht hier fast 40% - und deckt sich auch mit dem Eindruck der Experimentatoren, dass die Abbé-Methode für große  $\gamma$  ungenau wird. In der Praxis konnte in diesen Fällen der genaue Längenwert  $l$  nicht bestimmt werden, da es äußerst schwierig wurde, die Schärfe des Bildes präzise abzuschätzen. Probeweise Messungen ergaben, dass im Falle eines  $\gamma \approx 5$  der Schirm noch um fast 1,5 cm verschoben werden konnte, ohne dass eine merkliche Änderung der Schärfe des Bildes auftrat. Es ist deswegen ratsam, die Abbé-Methode tatsächlich nur für kleine Vergrößerungen zu verwenden, oder auf kompliziertere Regressionsmodelle zurück zu greifen, die auch den Fehler der x-Werte berücksichtigen können. Einige probeweise Rechnungen mit Hilfe von *OriginPro* wiesen aber darauf hin, dass im vorliegenden Fall die Ergebnisse einer solchen deutlich aufwändigeren Behandlung nur unwesentlich von den hier vorgestellten abweichen.

Die zeichnerische Konstruktion des Linsensystems und seiner Hauptebenen war ausreichend präzise, um die Systembrennweite zu  $f = (87 \pm 2) \text{ mm}$  zu bestimmen, was sehr nahe am theoretischen Wert nach der Linsenschleiferformel liegt:

$$f = \left( \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} + \frac{d}{f_2 f_3} \right)^{-1} \approx 89 \text{ mm} \quad (12)$$

Damit liegt der zeichnerische Wert auch recht nahe am mit der Abbé-Methode gefundenen Wert von  $f_S = (91 \pm 2) \text{ mm}$  und die beiden Werte überlappen sich in ihren Unsicherheiten. Interessanterweise weicht der zeichnerisch ermittelte Wert für den Hauptebenenabstand  $a = (-12 \pm 2) \text{ mm}$  signifikant vom nach Abbé berechneten  $a = (-24 \pm 4) \text{ mm}$  ab, die Fehlerintervalle überlappen sich dann allerdings im  $2\sigma$ -Bereich. Es liegt also vermutlich noch ein unerkannter systematischer Fehler vor. Die oben erwähnte Entscheidung, die x-Achsenfehler bei den Regressionen unberücksichtigt zu lassen könnte hier eine Rolle spielen, oder aber ein unabsichtlicher Messfehler bei der Bessel- oder Sphärometermethode.

## Literatur

- [1] Müller, U. *Einführung in die Messung, Auswertung und Darstellung experimenteller Ergebnisse in der Physik*. 2007.
- [2] Müller, U. *Physikalisches Grundpraktikum. Elektrodynamik und Optik*. 2010.

# A Anhang

Tabelle 1: Werte zur Berechnung der Brennweite mit der Bessel-Methode

$l$ [m]	$u_l$	$s_1$ [m]	$s_2$ [m]	$e$ [m]	$u_e$	$f$ [m]	$u_f$
1,012	0,005	0,1310	0,8840	0,7530	0,0001	0,113	0,002
1,067	0,005	0,1290	0,9410	0,8120	0,0001	0,112	0,002
1,098	0,005	0,1280	0,9710	0,8430	0,0001	0,113	0,002
1,190	0,005	0,1280	1,0650	0,9370	0,0001	0,113	0,002
0,959	0,005	0,1320	0,8290	0,6970	0,0001	0,113	0,002
0,910	0,005	0,1330	0,7780	0,6450	0,0001	0,113	0,002
0,817	0,005	0,1360	0,6820	0,5460	0,0001	0,113	0,002
0,772	0,005	0,1380	0,6350	0,4970	0,0001	0,113	0,002
0,721	0,005	0,1410	0,5820	0,4410	0,0001	0,113	0,002
0,662	0,005	0,1450	0,5200	0,3750	0,0001	0,113	0,002

Tabelle 2: Werte für die linearen Regressionen zur Bestimmung der Hauptebenen mit Hilfe der Abbé-Methode

1. Messreihe							
$x$ [m]	$u_x$	$G$ [m]	$u_G$	$\gamma$ [-]	$u_\gamma$	$A$ [-]	$u_A$
0,125	0,005	0,005	0,001	4,000	0,444	1,250	0,284
0,145	0,005	0,010	0,001	2,000	0,119	1,500	0,053
0,155	0,005	0,012	0,001	1,739	0,093	1,575	0,037
0,165	0,005	0,014	0,001	1,429	0,066	1,700	0,023
0,175	0,005	0,017	0,001	1,212	0,050	1,825	0,015
0,205	0,005	0,023	0,001	0,870	0,030	2,150	0,006
0,120	0,005	0,004	0,001	5,000	0,686	1,200	0,477
0,135	0,005	0,008	0,001	2,667	0,204	1,375	0,108
0,150	0,005	0,011	0,001	1,905	0,109	1,525	0,047
0,185	0,005	0,018	0,001	1,111	0,044	1,900	0,012
2. Messreihe							
$x$ [m]	$u_x$	$G$ [m]	$u_G$	$\gamma$ [-]	$u_\gamma$	$A$ [-]	$u_A$
0,120	0,005	0,014	0,001	1,429	0,066	1,700	0,023
0,130	0,005	0,017	0,001	1,212	0,050	1,825	0,015
0,140	0,005	0,018	0,001	1,111	0,044	1,900	0,012
0,150	0,005	0,021	0,001	0,952	0,034	2,050	0,008
0,110	0,005	0,012	0,001	1,739	0,093	1,575	0,037
0,100	0,005	0,010	0,001	2,105	0,131	1,475	0,060
0,090	0,005	0,008	0,001	2,500	0,180	1,400	0,092
0,080	0,005	0,005	0,001	4,000	0,444	1,250	0,284
0,085	0,005	0,007	0,001	3,077	0,267	1,325	0,152
0,095	0,005	0,009	0,001	2,222	0,145	1,450	0,069

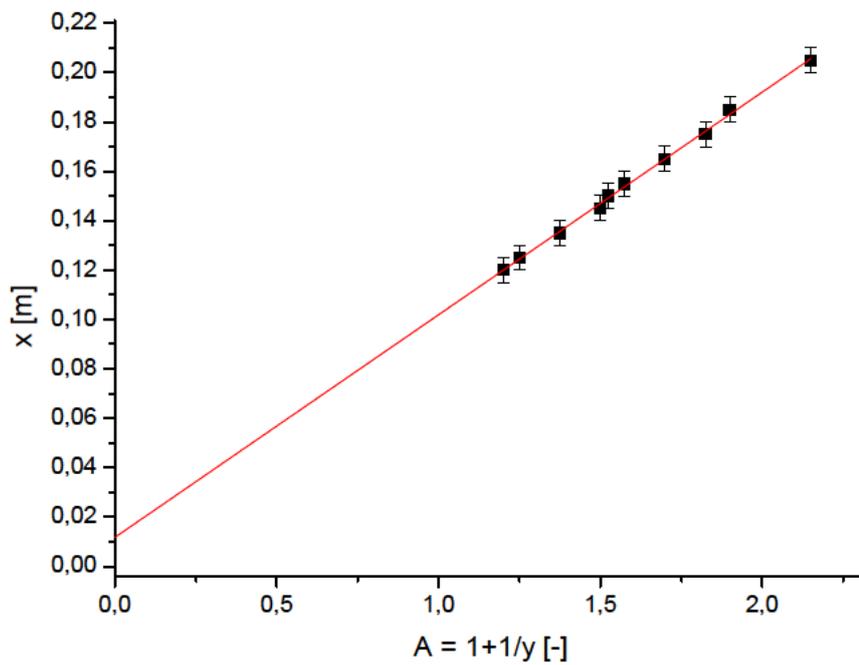


Abbildung 1: Messreihe 1: Bestimmung von  $f$  aus dem Anstieg der Kurve und von  $c$  aus dem Achsenabschnitt

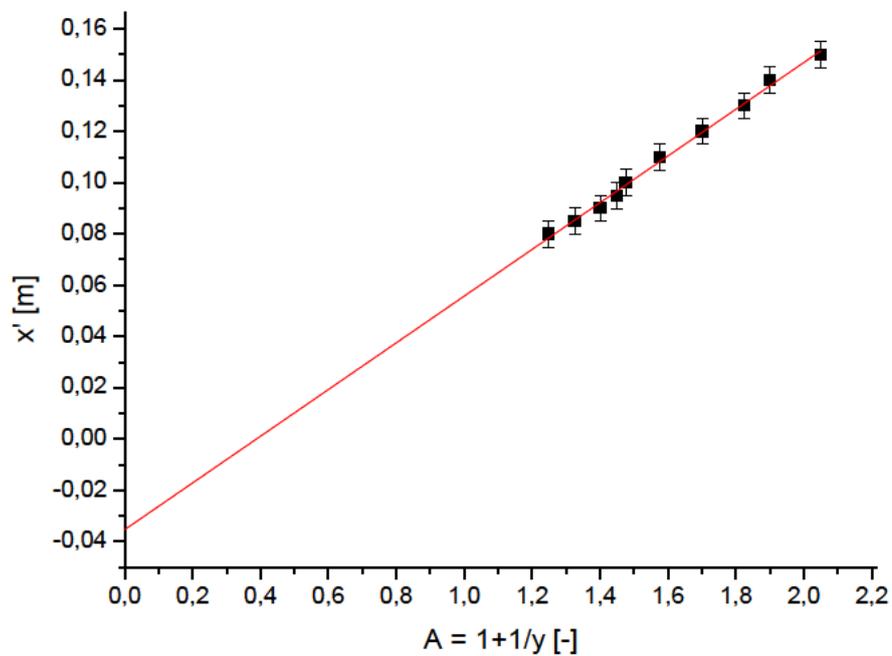


Abbildung 2: Messreihe 2: Bestimmung von  $f$  aus dem Anstieg der Kurve und von  $c'$  aus dem Achsenabschnitt